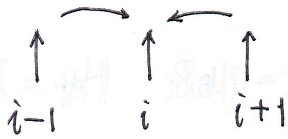
強磁性 平均場近似

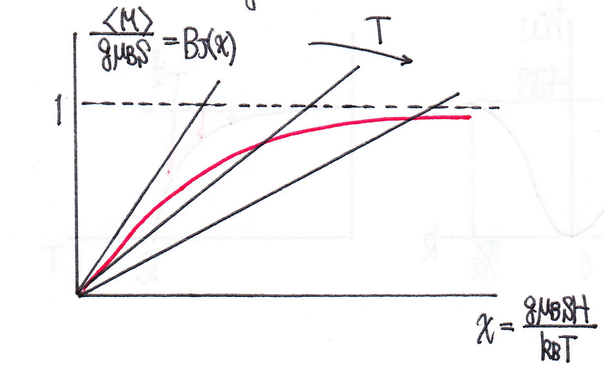
$$H = \sum_{\langle ij \rangle} -2J\,\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j$$



$$= \sum_{\langle ij \rangle} \frac{-2J}{(g\mu_B)^2} \mathbf{M}_i \cdot \mathbf{M}_j$$

$$= \sum_{\langle ij \rangle} \left(-\mathbf{H}_{eff} \cdot \mathbf{M}_j \right)$$

$$\mathbf{H}_{eff} = \lambda \langle \mathbf{M} \rangle, \quad \lambda = \frac{2zJ}{(g\mu_B)^2} \qquad z : \text{配位数}$$



$$\frac{\langle M \rangle}{g\mu_B S} = \frac{H_{eff}}{\lambda g\mu_B S} = \frac{k_B T}{\lambda (g\mu_B S)^2} \underbrace{\frac{g\mu_B S H_{eff}}{k_B T}}_{x}$$

$T = T_c$ において

$$\frac{k_B T_c}{\lambda (g\mu_B S)^2} = \frac{S+1}{3S}$$

$$\therefore\ T_c = \frac{\lambda (g\mu_B)^2 S(S+1)}{3k_B} = \frac{2zJS(S+1)}{3k_B} = \lambda C$$

$T > T_c$ において常磁性

$$\langle M \rangle = \chi H$$

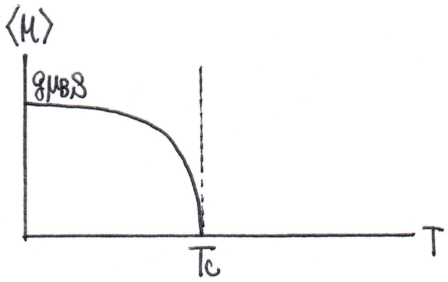
$$= \chi_{ion} (H + H_{ext}) \qquad \chi_{ion} = \frac{C}{T} \qquad H_{ext} : \text{分子場}$$

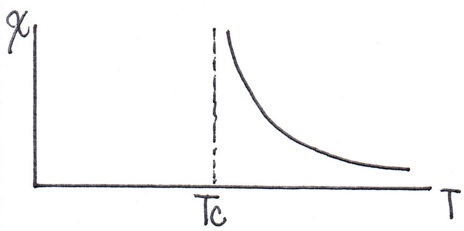
$$= \chi_{ion} (H + \lambda \langle M \rangle)$$

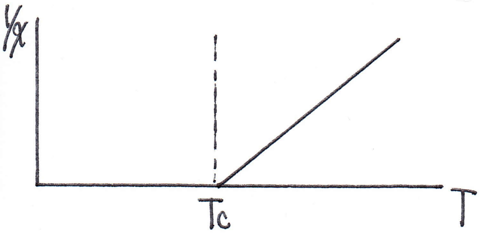
$$\Leftrightarrow (1 - \lambda \chi_{ion}) \langle M \rangle = \chi_{ion} H$$

$$\therefore\ \langle M \rangle = \frac{\chi_{ion}}{1 - \lambda \chi_{ion}} H$$

$$\chi = \frac{C/T}{1 - \lambda C/T} = \frac{C}{T - \lambda C} = \frac{C}{T - T_c}$$







強磁性体の素励起、スピン波

$$\hbar\frac{d\mathbb{S}_i}{dt} = \mathbb{M}_i \cdot \mathbb{H}_{eff} \qquad \mathbb{M}_i = g\mu_B\mathbb{S}_i \qquad \mathbb{H}_{eff} = \lambda\sum_{\substack{\text{all}\\ \text{neibour}}}\mathbb{M}_{i+1}$$

$$\uparrow \ \underset{i}{\vec{\uparrow}} \ \uparrow \ \uparrow \ \cdots\cdots$$

$$= \lambda g\mu_B\sum_{\text{all } n}\mathbb{S}_{i+1}$$

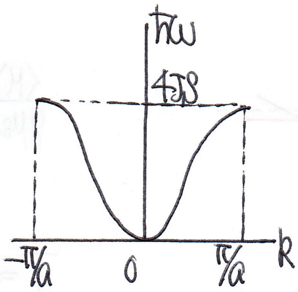
1次元の場合

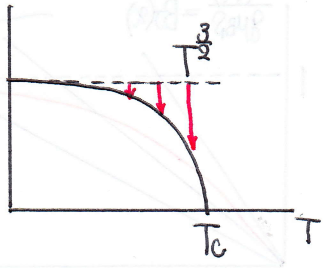
$$\hbar\frac{d\mathbb{S}_i}{dt} = \lambda g\mu_B(\mathbb{S}_{i-1}+\mathbb{S}_{i+1})$$

ここで

$$\delta\mathbb{S}_i = \mathbb{A}e^{i(\mathbb{k}\cdot\mathbb{r}-\omega t)}$$

$$\hbar\omega = 4JS(1-\cos ka) \qquad \mathbb{k}\cdot\mathbb{r} = kna$$





3.7 反強磁性

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow \\ A & B & A & B \end{array}$$

$$H = \sum_{\langle ij\rangle} 2J\mathbb{S}_i\cdot\mathbb{S}_j \qquad J>0$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) & \text{singlet} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) & \text{triplet} \end{cases}$$

$$\langle M_A\rangle = -\langle M_B\rangle$$

$$H = \sum_{\langle AB\rangle}\frac{2J}{g\mu_B^2}(\mathbb{M}_A\cdot\mathbb{M}_B + \mathbb{M}_B\cdot\mathbb{M}_A)$$

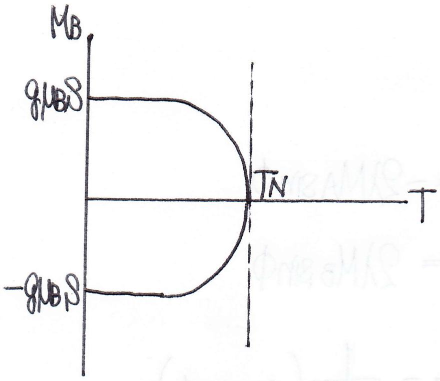
$$= \sum_B\frac{2z\langle M_A\rangle}{g\mu_B^2}M_B + \sum_A\frac{2z\langle M_B\rangle}{g\mu_B^2}M_A$$

$$= -\sum_B\lambda\langle M_B\rangle M_B - \sum_A\lambda\langle M_B\rangle M_A$$

$$= -H_{eff}\left(\sum_B M_B + \sum_A M_A\right)$$

$$= -H_{eff}\sum_i M_i$$

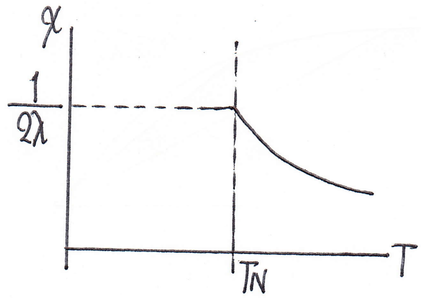
以下強磁性と同様の計算をする。



Néel温度

$$T_N = \frac{\lambda (g\mu_B)^2 S(S+1)}{3k_B} = \lambda C - \frac{2zJS(S+1)}{3k_B}$$

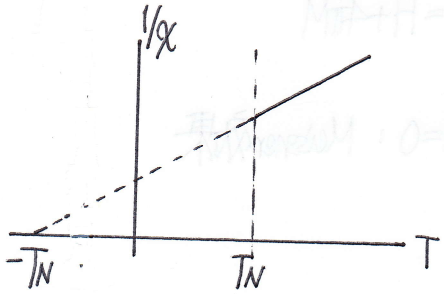
$$M_B = \chi_{ion}(H + H_{eff})$$
$$= \chi_{ion}(H + \lambda\langle M_A\rangle)$$
$$= \chi_{ion}(H - \lambda\langle M_B\rangle)$$



$$\langle M_B\rangle = \frac{\chi_{ion}}{1+\chi_{ion}\lambda}H = \frac{C/T}{1+C\lambda/T}H = \frac{C}{T+C\lambda} = \frac{C}{T+T_N}$$

いま

$$M\left(q=\frac{\pi}{a}\right) = M_{AF}\, e^{i\frac{\pi}{a}x}$$

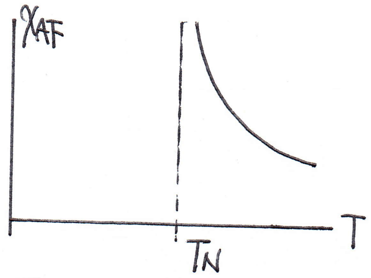


$$H\left(q=\frac{\pi}{a}\right) = H_{AF}\, e^{i\frac{\pi}{a}x}$$

とり

$$\chi_{AF} = \frac{M_{AF}}{H_{AF}}$$

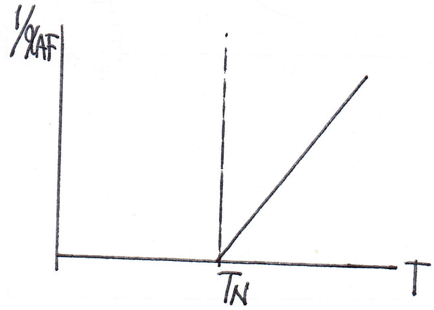
とする。このとき



$$M_{AF} = \chi_{ion}(H_{AF} + H_{effAF})$$

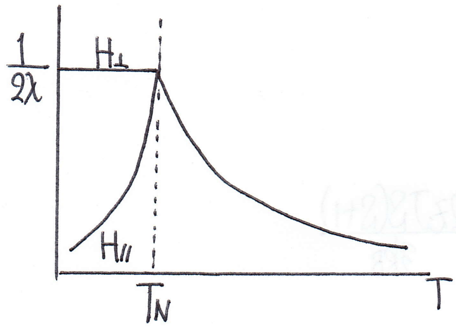
$$= \chi_{ion}(H_{AF} + \lambda M_{AF})$$

なので



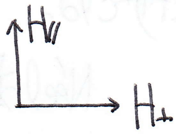
$$\chi_{AF} = \frac{\chi_{ion}}{1-\lambda\chi_{ion}} = \frac{C}{T-T_N}$$

となる。

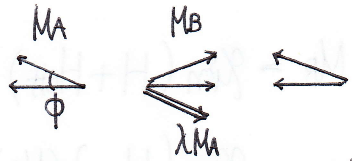


$q=0$ 一様帯磁率

$\uparrow \downarrow \uparrow \downarrow$



$H_\perp$方向について

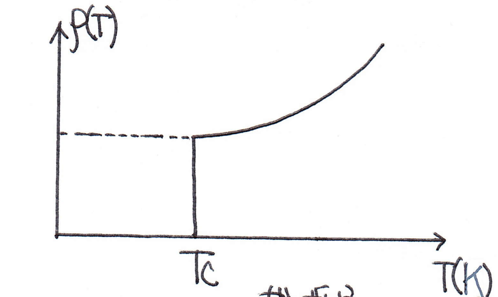


$$H = -2\lambda M_A \sin\phi$$
$$= 2\lambda M_B \sin\phi$$

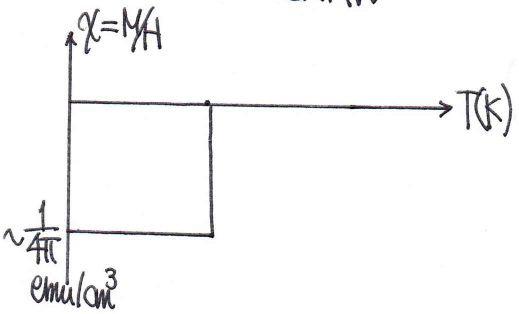
$$\chi = \frac{M_B \sin\phi}{H} = -\frac{M_A \sin\phi}{H} = \frac{1}{2\lambda} \ (\text{constant})$$

4. 超伝導

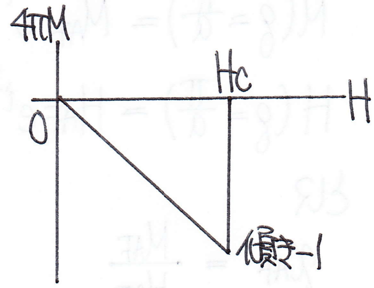
4.1 現象概観



電気抵抗

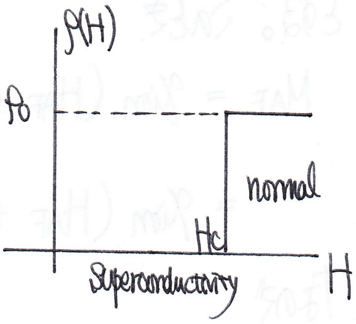


~ -1 emu/mol



$B = H + 4\pi M$

$B = 0$: Meissner効果



H_c : 500G for Pb

T_c : Hg ~ 4K

Pb ~ 7K

Nb_3Ge ~ 23K

銅酸化物 ≲ 160K

鉄系 ≲ 55K

$\rho=0$ と $B=0$ はいずれが本質か。

$\rho=0$ のとき、$E=0$（完全導体）であるから

$$\frac{\partial B}{\partial t}=0 \quad \Leftrightarrow \quad B=\text{const.}$$

よって、$B=0$ の方が $\rho=0$ より強い条件であり、本質と考えられる。

London方程式

$$\boldsymbol{j}=-ne\boldsymbol{v}=-\frac{ne}{m}\left(\mathbb{P}+\frac{e}{c}\mathbb{A}\right)$$ 正準運動量

$\langle \mathbb{P} \rangle \neq 0$ 常伝導電流を与える。

いま、

$\langle \mathbb{P} \rangle = 0$

としてみると、

$$\boldsymbol{j}=-\frac{ne^2}{mc}\mathbb{A}$$

$$\therefore\ -\frac{ne^2}{mc}\mathbb{B}=\nabla\times\boldsymbol{j}$$

$$=\nabla\times\left(\nabla\times\frac{c}{4\pi}\mathbb{B}\right)$$

$$=\nabla(\nabla\cdot\mathbb{B})-\nabla^2\mathbb{B}$$

$$=-\nabla^2\mathbb{B}$$

$$\Leftrightarrow\ \nabla^2\mathbb{B}=\frac{1}{\lambda^2}\mathbb{B}$$

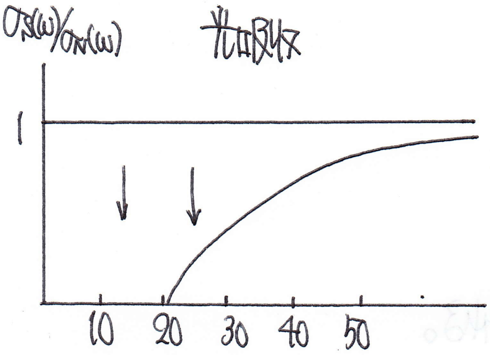
$$\frac{1}{\lambda^2}=\underbrace{\frac{4\pi ne^2}{m}}_{\omega_p^2}\frac{1}{c^2}$$

$$B(x)=B_0\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)$$

$\therefore\ x\to\infty$ のとき $B\to 0$ である。

これは $\langle \mathbb{P} \rangle = 0$ を意味するか？ 波動関数が硬い。

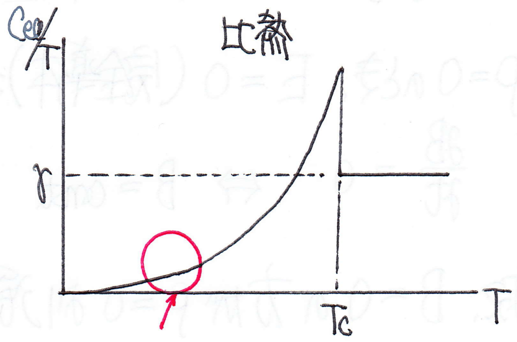
ギャップの存在



$T_c = 7\mathrm{K}$

$\dfrac{E_g}{k_B T_c} \sim 5$

$1\mathrm{eV} \sim 8000\mathrm{cm}^{-1}$



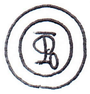
$C_{el} \propto \exp\left(-\frac{T_0}{T}\right)$

$T_0 \sim aT_c$

電子励起に k_BT のオーダーのギャップが認められる。

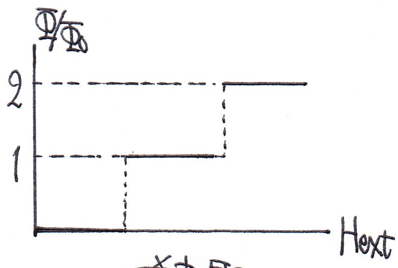
→ 電気を運ぶ何らかの凝縮相ではないか?

電子対の存在



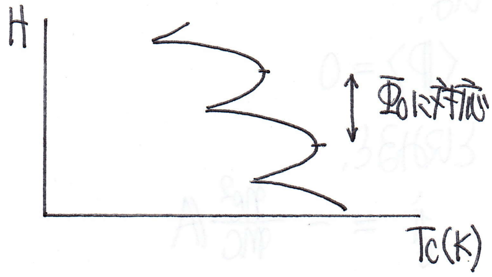
超伝導リング

リング内部に磁束がトラップされる。



磁束の量子化

$\Phi_0 = \dfrac{ch}{2e} = 2.07\times10^{-7}\,\mathrm{G/cm^2}$



Naiveな理解

$\psi = \psi_0 e^{-i\theta(\mathbf{r})}$　　$\theta(\mathbf{r})$: 位相

$-i\hbar\nabla\psi = -\hbar\nabla\theta\,\psi$

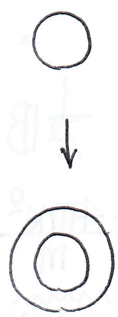
$j_s \propto -\hbar\nabla\theta + \frac{e}{c}A$

これを一周りで積分する。

$\oint \hbar\nabla\theta\, dl = \oint \frac{e}{c}A\, dl$

$\therefore\ \hbar\cdot 2\pi n = \frac{e}{c}\Phi$

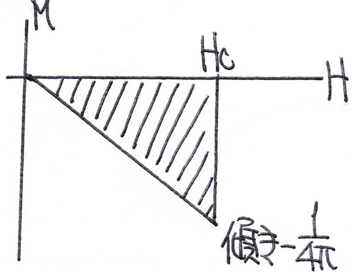
$\Leftrightarrow\ \Phi = \frac{ch}{e}n$



しかし、実験では $\frac{ch}{2e}$ となっている。

→ e から $2e$ に変化している。

超伝導凝縮エネルギー



$$F_S + \frac{H_c^2}{8\pi} = F_N$$

$$\Leftrightarrow F_N - F_S = \frac{H_c^2}{8\pi}$$

$$Pb : H_c = 500G$$

$$\longrightarrow \frac{(500G)^2}{8\pi} \sim 10^4\ erg/cm^3 = 10^{-3}\ J/cm^3$$

$1cm^3$ に $n = 5\times10^{22}$ と仮定する。

$$5\times10^{22}/cm^3 \times \underbrace{k_BT_c}_{7K\times1.34\times10^{-23}J/K\sim10^{-22}J} \sim 5J/cm^3 \gg F_N - F_S$$

(1個のエネルギー？)

そうであれば すべての電子が $F_N - F_S$ 分の利得を得ているわけではない。

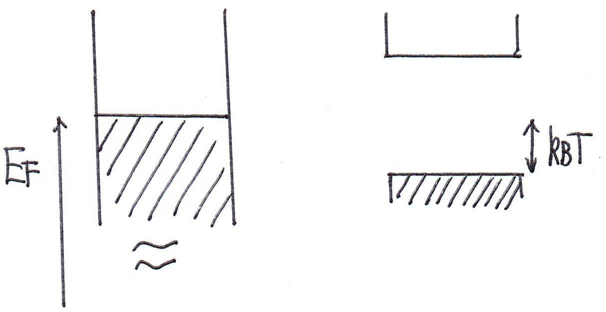
利得を得る電子数は $N(E_F)\cdot k_BT_c$ より

$$N(E_F)k_BT_c \cdot k_BT_c \sim \frac{5\times10^{22}}{\underbrace{2eV}_{\sim3\times10^{-19}J}} \cdot 10^{-22}\cdot10^{-22} \sim 1.6\times10^{-3}J/cm^3$$

k_BT_c エネルギースケール

電子が対を作り凝縮相を形成、エネルギーを下げる。

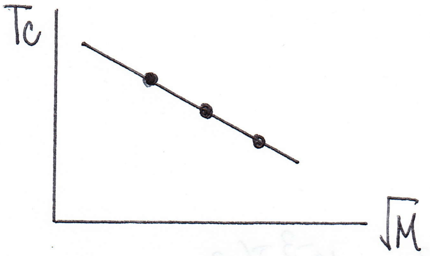
エネルギーの得 k_BT_c → Fermi レベル近傍の k_BT_c のみ寄与するメカニズム.



電子間の引力？

4.2 電子格子相互作用と引力相互作用

アイソトープ効果

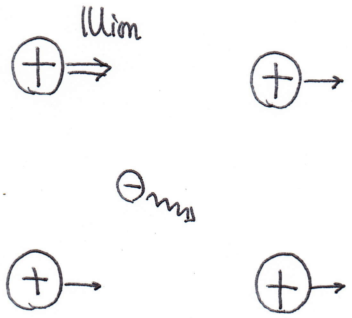


Hg 同位体 199. 200. 202

$T_c \propto \frac{1}{\sqrt{M}}$

∵ フォノンのエネルギースケール? $\sqrt{\frac{k}{M}}$

電子格子相互作用の定式化



$\nabla u(r) \propto$ 核電荷の変調 $dN_{ion}(r)$

電子密度分布 $n(r)$

$$H_{int} = \frac{1}{v}\int C\, n(r)\, \nabla u \, dr$$

v : 単位胞の大きさ

C : 相互作用定数